Fuchs双曲型方程式について (線型および非線型偏微分方程式の研究)

田原, 秀敏

数理解析研究所講究録
402巻 1980年 126-154

FUCHS双曲型方程式について

上智大 理工　　田原 秀敏

mを正自然数、$(t,x)=(t,x_1,\cdots,x_n)\in\Omega=[0,T]\times R^n$とし

$$P(t,x,\partial_t,\partial_x)=t^k\partial_t^m+P_1(t,x,\partial_x)t^{k-1}\partial_t^{m-1}+\cdots$$
$$+P_k(t,x,\partial_x)\partial_t^{m-k}+\cdots+P_m(t,x,\partial_x)$$

をΩ上のC^∞係数をもつ線型偏微分作用素であって次の条件：

(A-1)　kは$0\leqq k\leqq m$なる整数、

(A-2)　$\mathrm{ord}\,P_j(t,x,\partial_x)\leqq j\quad(1\leqq j\leqq m)$、

(A-3)　$\mathrm{ord}\,P_j(0,x,\partial_x)=0\quad(1\leqq j\leqq k)$

を満たすものとする。この時、Pをtに関しFUCHS型なる作用素（Fuchsian type operator with respect to t）と呼ぶ。Pに更に適当な“双曲型性”の条件を付加して考える時、PをFUCHS双曲型作用素（Fuchsian hyperbolic operator with respect to t）と呼ぶ。条件(A-3)より$P_j(0,x,\partial_x)$ $(1\leqq j\leqq k)$はxの関数である。これを$P_j(0,x,\partial_x)=a_j(x)$ $(1\leqq j\leqq k)$とおく。するとPの決定多項式$C(\lambda,x)$は

$$C(\lambda,x)=\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-m+1)+a_1(x)\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-m+2)$$
$$+\cdots+a_k(x)\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-m+k+1)$$

によって定義される。$C(\lambda,x)=0$ の根を $\lambda=0,1,\cdots,m-k-1$, $\rho_1(x),\cdots\rho_k(x)$ と書き、これらを P の特性指数と呼ぶ。

本稿の目的は、適当な双曲型性条件のもとで（条件の具体的な記述は §4 に譲る）次の C^∞ 初期値問題の適切性を証明する事にある。

定理. $\rho_1(x),\cdots,\rho_k(x)\notin\{\lambda\in\mathbb{Z};\lambda\geq m-k\}$ ($\forall x\in\mathbb{R}^n$) とする。この時、任意の $u_0(x),\cdots,u_{m-k-1}(x)\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ と任意の $f(t,x)\in C^\infty([0,T]\times\mathbb{R}^n)$ に対して次の方程式の解 $u(t,x)\in C^\infty([0,T]\times\mathbb{R}^n)$ が唯一つ存在する：

$$\begin{cases} P(t,x,\partial_t,\partial_x)u(t,x)=f(t,x), \\ \partial_t^i u(t,x)\big|_{t=0}=u_i(x) \quad (0\leq i\leq m-k-1). \end{cases}$$

更に解の依存領域は有界である。

$k=0$ の時が古典的な双曲型方程式の初期値問題である。何故に上の様な Fuchs 双曲型方程式の形で扱うのか？という事については [1][2] で既に相当詳しく説明しておいたので、本稿では、その続編として“どうやって扱うのか”或

いは“どうやって定理を導くのか”という“定理の証明方法”に焦点をあてて話をすすめてゆくことにする。具体的には、まず §1 で幾つかの例を通してその基本的なアイデアとプログラムを説明し、以下 §2, §3 及び §4 でそれらを順次具体的に実現してゆき、§4 で定理の証明が完結する、という構成で本稿の話をすすめてゆきたいと思う。

§1 基本的なアイデアとプログラム

初めに次の形の弱双曲型作用素を考えてみることにする：

$$P_1 = \partial_t^2 - t^{2\ell}\partial_x^2 + t^{\ell-1}a(t,x)\partial_x + b(t,x)\partial_t + c(t,x),$$

$(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}$, ℓ は $\geqq 1$ なる整数とする。

既に良く知られている様に P_1 に対する初期値問題 ($P_1u=f$, $u|_{t=0}=u_0$, $\partial_t u|_{t=0}=u_1$) は C^∞ 適切である。これを次の順序で解く事を考えてみよう。①まず解 $u(t,x)$ を t について Taylor 展開して $u(t,x)=u_0(x)+tu_1(x)+\cdots+t^{s-1}u_{s-1}(x)+t^s u_s(t,x)$ と表わす。すると Taylor 係数 $u_0(x), u_1(x), \cdots, u_{s-1}(x)$ は $u(t,x)$ が方程式を満足する事から一意的に決まってしまい新しく“$u_s(t,x)$”を未知関数とする方程式が得られる。しかも数字 s は幾らでも大きくとれる。② $u_s(t,x)$ 或いは $(t^s u_s(t,x))$ を未知関数とする方程式は“ $P_1(t^s u_s)=t^{s-2}\times$(既知関数) ”という形になる。

両辺にt^2を掛けると " $t^2P_1(t^s u_s)=t^s\times$(既知関数) " を得る。$t^2P_1$は $t^2P_1=(t\partial_t)(t\partial_t-1)-(t^{\ell+1}\partial_x)^2+a(t,x)(t^{\ell+1}\partial_x)+(tb(t,x))(t\partial_t)+(t^2c(t,x))$ という形に整理される。③ $t\partial_t(t^s u_s)=t^s(t\partial_t+s)u_s$ を使って両辺のt^sを相殺すると方程式は " $(t\partial_t+s)(t\partial_t+s-1)u_s-(t^{\ell+1}\partial_x)^2u_s+a\cdot(t^{\ell+1}\partial_x)u_s+tb\cdot(t\partial_t+s)u_s+t^2cu_s=$既知関数 " となる。④ここで $u^{(0)}=u_s$, $u^{(1)}=(t\partial_t+s)u_s$, $u^{(2)}=t^{\ell+1}\partial_x u_s$ とおき $\vec{u}={}^t(u^{(0)},u^{(1)},u^{(2)})$ とおくと上の方程式は次の形の一階対称系に帰着される：

$$(*)\quad (t\partial_t+s)\vec{u}+\begin{bmatrix}0, & -1, & 0\\ t^2c, & tb-1, & a\\ 0, & 0, & -\ell-1\end{bmatrix}\vec{u}-t^{\ell+1}\begin{bmatrix}0, & 0, & 0\\ 0, & 0, & \partial_x\\ 0, & \partial_x, & 0\end{bmatrix}\vec{u}=\begin{pmatrix}\text{既}\\ \text{知}\\ \text{関}\\ \text{数}\end{pmatrix}$$

⑤結局初めの初期値問題は、"sが十分大きい"という条件のもとで"方程式(*)を解け"という問題に帰着されたことになる。従って(*)を研究すれば良いわけである。

次に、無限次の退化をもつ次の形の弱双曲型作用素：

$$P_2=\partial_t^2-e^{-2/t}\partial_x^2+\frac{1}{t^2}e^{-1/t}a(t,x)\partial_x+b(t,x)\partial_t+c(t,x),$$
$$(t,x)\in[0,T]\times R$$

を考えてみよう。これも良く知られている様にP_2に対する初期値問題($P_2u=f$, $u|_{t=0}=u_0$, $\partial_t u|_{t=0}=u_1$)もC^∞適切である。これについてもP_1の時と同様に問題の書き換えをやってみよう。係数が$t=0$で無限次の接触をしている為上の様にTaylor展開だけでは処理できず次の様な操作が必要とされる。①まず、

作用素P_2を次の様に分ける：$P_2=P_2^{(1)}+P_2^{(2)}$, $P_2^{(1)}=\partial_t^2+a(t,x)\partial_t+c(t,x)$, $P_2^{(2)}=e^{-2/t}\partial_x^2+\frac{1}{t^2}e^{-1/t}a(t,x)\partial_x$。解$u(t,x)$を$u(t,x)=u^{(0)}(t,x)+u^{(1)}(t,x)+\cdots+u^{(s)}(t,x)$と分ける。すると$P_2$に対する初期値問題は次の様に分割される：$(*)_0$ $P_2^{(1)}u^{(0)}=f$, $u^{(0)}|_{t=0}=u_0$, $\partial_t u^{(0)}|_{t=0}=u_1$, $(*)_1$ $P_2^{(1)}u^{(1)}=-P_2^{(2)}u^{(0)}$, データ$\equiv 0$, $(*)_2$ $P_2^{(1)}u^{(2)}=-P_2^{(2)}u^{(1)}$, データ$\equiv 0$, $\cdots$, $(*)_{s-1}$ $P_2^{(1)}u^{(s-1)}=-P_2^{(2)}u^{(s-2)}$, データ$\equiv 0$, $(*)_s$ $P_2 u^{(s)}=-P_2^{(2)}u^{(s-1)}$, データ$\equiv 0$ 。②作用素$P_2^{(1)}$は常微分作用素である。従って$(*)_0$ $(*)_1\cdots(*)_{s-1}$迄は一意的に解けるので問題は$(*)_s$を解く事のみ残る。③ここで次に注意しよう。$(*)_1$の右辺$-P_2^{(2)}u^{(0)}$は作用素$P_2^{(2)}$の係数の形から少なくとも"$-P_2^{(2)}u^{(0)}=e^{-3/4t}\times C^\infty$関数"という程度の分解は可能である。従って$(*)_1$の解$u^{(1)}(t,x)$についても"$u^{(1)}=e^{-1/2t}\times C^\infty$関数"という程度の分解ができる。次にそれを$(*)_2$に代入すると$(*)_2$の右辺$-P_2^{(2)}u^{(1)}$は"$-P_2^{(2)}u^{(1)}=e^{-(3/4t+1/2t)}\times C^\infty$関数"程度の分解は可能。従ってその解$u^{(2)}(t,x)$についても"$u^{(2)}=e^{-(1/2t+1/2t)}\times C^\infty$関数"程度の分解ができる。以下この操作を次々とやってゆくと$(*)_{s-1}$の解$u^{(s-1)}(t,x)$は"$u^{(s-1)}=e^{-(s-1)/2t}\times C^\infty$関数"と書ける。従って最終的に$(*)_s$の右辺$-P_2^{(2)}u^{(s-1)}$は"$-P_2^{(2)}u^{(s-1)}=e^{-s/2t}\times C^\infty$関数"という分解をもつことになる。④以上を総括すれば初めの~~最~~初期値問題は"$P_2 u^{(s)}=e^{-s/2t}\times C^\infty$関数, $u^{(s)}$の初期データ$\equiv 0$"という方程式を解く事に帰着される。

両辺に t^4 を掛けると "$t^4 P_2 u^{(s)} = e^{-s/2t} \times$(既知関数)" を得る。$t^4 P_2$ は $t^4 P_2 = (t^2\partial_t - 2t)(t^2\partial_t) - (t^2 e^{-1/t}\partial_x)^2 + a(t,x)(t^2 e^{-1/t}\partial_x) + (t^2 b(t,x))(t^2\partial_t) + (t^4 c(t,x))$ という形に整理される。⑤ここで解 $u^{(s)}$ は初めから $u^{(s)} = e^{-s/2t} u$ という分解をもつものとして考えてみよう。すると $(t^2\partial_t)(e^{-s/2t}u) = e^{-s/2t}(t^2\partial_t + s/2)u$ を使って $e^{-s/2t}$ を相殺でき方程式は "$(t^2\partial_t + s - 2t)(t^2\partial_t + s)u - (t^2 e^{-1/t}\partial_x)^2 u + a\cdot(t^2 e^{-1/t}\partial_x)u + t^2 b(t^2\partial_t + s)u + t^4 c u =$ 既知関数" となる。⑥ $u_0 = u$, $u_1 = (t^2\partial_t + s)u$, $u_2 = (t^2 e^{-1/t}\partial_x)u$, $\vec{u} = {}^t(u_0, u_1, u_2)$ とおくと上の方程式は次の形の一階対称系に帰着される。

$$(*)\quad (t^2\partial_t + s)\vec{u} + \begin{bmatrix} 0, & -1, & 0 \\ t^4 c, & t^2 b - 2t, & a \\ 0, & 0, & -2t-1 \end{bmatrix}\vec{u} - t^2 e^{-1/t}\begin{bmatrix} 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & \partial_x \\ 0, & \partial_x, & 0 \end{bmatrix}\vec{u} = \begin{pmatrix} 既 \\ 知 \\ 関 \\ 数 \end{pmatrix}。$$

⑦結局初めの初期値問題は "s が十分大きい" という条件のもとで "方程式 $(*)$ を解け" という問題に帰着されたことになる。従って $(*)$ を研究すれば良いことになる。

以上2つの例によって結局 P_1, P_2 に対する初期値問題は確定特異点とか不確定特異点をもつ一階の対称系に帰着されることが分かった。そこで上を少し抽象化して、

<u>プログラム(1)</u>：$L^2(\mathbb{R}^n)$ に値をとる常微分方程式：

$$(S)\quad t^\sigma \frac{du}{dt} + (s + A(t))u - t^\delta B(t)u = f(t),\quad 0 < t \leq T$$

に対し、適当な条件（例えば $A(t)$ は有界作用素, $B(t)$ は

一階の対称双曲系または対称化可能な双曲系などという条件）のもとで(S)の解の存在，一意性及び解の微分可能性定理を確立すること、

という事がまず要求される。これが出来れば例のP_1, P_2については解けた事になる。しかし更に一般の単独高階の方程式を扱かおうとすると、一階の対称系（或いは対称化可能系）に帰着させようとする場合どうしても擬微分作用素を使う必要が出て来る。しかも退化した方程式には、それに適した擬微分作用素のクラスが存在するはずでそれは従来の擬微分作用素のクラスとは若干異なって来るはずである、というわけで

プログラム(2) ：単独高階のFuchs双曲型方程式を(S)の形の常微分方程式に帰着する際に最も便利な擬微分作用素のクラスを設定すること

ということが次に求められる。上の(1)(2)が出来れば最後に

プログラム(3) ：上の(1)(2)を組みあわせることによりFuchs双曲型方程式の初期値問題を解く

ことが出来る。その基本的なアイデアは既にP_1, P_2に対して説明した通りである。というわけで、上の(1)(2)(3)を順次やってゆけば初めの定理が得られることになる。(1)については§2，(2)については§3，(3)については§4で順次具体的に内容を述べてゆくことにする。

§2：プログラム(1)について．

初めに最も基本的な対称系の場合について述べる。次の形の $L^2(R^n)$ に値をもつ常微分方程式を考える：

(S) $t^\sigma \frac{du}{dt} + A(t)u - t^\rho B(t)u = f(t)$，$0<t\leqq T$。

但し $\sigma\geqq 1$，$\rho>\sigma-1$，$A(t)$ は0階の擬微分作用素，$B(t)$ は1階の擬微分作用素，$u=u(t)$ と $f(t)$ は $L^2(R^n)$ に値をとるもの関数とする。§1の例の抽象化として次を仮定する：

(B-1) 正数 a が存在して $Re(A(t)u,u)\geqq a\|u\|_{L^2}^2$ $(\forall u\in L^2(R^n))$，

(B-2) $B(t)$ は対称系である。つまり、$B(t)+B(t)^*$ は0階の擬微分作用素となる。

以上の条件のもとで方程式(S)について次が成り立つ。

定理(2-1)：m を$\geqq 1$ なる整数とする。この時、任意の $f(t)\in C^0([0,T],H^m(R^n))$ に対して方程式(S)の解 $u(t)\in C^0([0,T]\times H^m(R^n))\cap C^1((0,T],H^{m-1}(R^n))$ が唯一つ存在する。もしも $f(t)$ が "$t^{\sigma k}f(t)\in C^k([0,T],H^{m-1-k}(R^n))$ $(k=0,1,\cdots,m-1)$" を満たすならば解 $u(t)$ も "$t^{\sigma k}u(t)\in C^k([0,T],H^{m-k}(R^n))$ $(k=0,1,\cdots,m)$" なる条件を満足する。

（証明の概略）証明はエネルギー不等式を使って実行される。

（第1段）エネルギー不等式：$u(t)$を(S)の解であって $\|u(t)\|=O(1)$ $(t\to+0)$ を満たすものとすると次の評価が成り立つ；

$$\|u(t)\| \leq C\int_0^\infty e^{-as}\|f(\varphi_\sigma(t,s))\|ds, \quad 0\leq t\leq T。$$

但しCは正定数、aは(B-1)の定数、$\varphi_\sigma(t,s)$ は $\varphi_\sigma(t,s)=te^{-s}$ ($\sigma=1$ のとき), $=t[(\sigma-1)st^{\sigma-1}+1]^{-1/(\sigma-1)}$ ($\sigma>1$ のとき) で定義される関数とする。証明は次の通りである。$\sigma=1$ の時をやる。
$2\|u(t)\|\cdot t\frac{d\|u(t)\|}{dt} = t\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 = 2\mathrm{Re}(t\frac{du}{dt},u) = -2\mathrm{Re}(A(t)u,u) + 2t^\rho \mathrm{Re}(B(t)u,u)+2\mathrm{Re}(f,u) \leq -2a\|u\|^2+2t^\rho b\|u\|^2+2\|f\|\|u\|$
(aは(B-1)の正数, bは適当な正数)を得る。故に $\|u\|$ を相殺すると $t\frac{d\|u\|}{dt}+a\|u\|-bt^\rho\|u\|\leq\|f\|$ を得る。両辺に $\frac{1}{t}e^{a\log t}\times e^{-(\frac{b}{\rho})t^\rho}$ を掛けて整理すると $\frac{d}{dt}(e^{a\log t}e^{-(\frac{b}{\rho})t^\rho}\|u\|)\leq \frac{1}{t}e^{a\log t}e^{-(\frac{b}{\rho})t^\rho}\|f(t)\|$ を得る。両辺を $\varepsilon(>0)$ から t 迄積分すると $e^{a\log t}e^{-(\frac{b}{\rho})t^\rho}\|u(t)\| - e^{a\log\varepsilon}e^{-(\frac{b}{\rho})\varepsilon^\rho}\|u(\varepsilon)\| \leq \int_\varepsilon^t \frac{1}{\tau} e^{a\log\tau}\times e^{-(\frac{b}{\rho})\tau^\rho}\|f(\tau)\|d\tau$ となる。ここで $\varepsilon\to+0$ とすると $a>0$ 及び $\|u(\varepsilon)\|=O(1)$ $(\varepsilon\to+0)$ の条件より左辺の第2項 $\to0$ となる。従って $e^{a\log t}e^{-(\frac{b}{\rho})t^\rho}\|u(t)\|\leq\int_0^t\frac{1}{\tau}e^{a\log\tau}e^{-(\frac{b}{\rho})\tau^\rho}\|f(\tau)\|d\tau$ となる。両辺に $e^{-a\log t}\cdot e^{(\frac{b}{\rho})t^\rho}$ を掛けて変数変換 $s=\log t-\log\tau$ (つまり $\tau=te^{-s}$) を行なうと $\|u(t)\|\leq\int_0^\infty e^{-as}e^{(\frac{b}{\rho})t^\rho(1-e^{-\rho s})}\times\|f(te^{-s})\|ds$ となる。$e^{(\frac{b}{\rho})T^\rho}\leq C$ なる定数Cをとると結局 $\|u(t)\|\leq C\int_0^\infty e^{-as}\|f(te^{-s})\|ds$ $(0\leq t\leq T)$ を得る。これが初めに掲げたエネルギー不等式である。$\sigma>1$ の時は $\frac{1}{t}e^{a\log t}\times e^{-(\frac{b}{\rho})t^\rho}$ の代わりに $\frac{1}{t^\sigma}\exp[-a/((\sigma-1)t^{\sigma-1})]\cdot\exp[-(\frac{b}{\rho-\sigma+1})t^{\rho-\sigma+1}]$ を使って上と同様の計算を実行すれば得られる。

(第2段) 近似解の構成：近似解 $\{u_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ で上のエネルギー不等式が適用できる様なものを構成したい。まず $U(t)$ を $U(t)=\int_0^\infty \exp[-A(0)s]\, f(\varphi_0(t,s))\,ds$ とおく。$U(t)$ は $t^\sigma \frac{d}{dt}U+A(0)U=f(t)$ の解であって $\|U(t)\|=O(1)$ $(t\to+0)$ を満たす。任意の n に対して $u_n(t)$ を次の様に決める。$0\leqq t\leqq \frac{1}{n}$ では $u_n(t)=U(t)$ と決める。$\frac{1}{n}\leqq t\leqq T$ では $u_n(t)$ を "$t^\sigma \frac{d}{dt}u_n+A(t)u_n-t^p B(t)u_n=f(t)$, $u_n|_{t=1/n}=U(1/n)$" なる初期値問題の解として決める。(S) は $[\frac{1}{n},T]\times R^n$ では普通の非特性の対称双曲系であるから解 $u_n(t)$ は一意的に決まる。こうして近似解が構成された。

(第3段) 真の解について：(第1段) のエネルギー不等式を (第2段) の近似解 $\{u_n(t)\}$ に適用すれば $n\to\infty$ の時, $u_n(t)$ は或る $u(t)$ に収束することがわかる。この $u(t)$ が (S) の真の解であることを見るのは易しい。よって存在がいえた。一意性はエネルギー不等式から自明。解の微分可能性についても非特性の対称双曲系の時の論法を真似ればよい。以上によって上の定理は証明された。

注意(2-2)：上の議論は次の条件下で十分成り立つ。(1) $A(t)$ の t に対する依存性は "$A(t)u\in C^0([0,T],L^2(R^n))$ $(\forall u\in L^2(R^n))$" で良い。微分可能性についても "$t^{\sigma k}A(t)u\in C^k([0,T],L^2(R^n))$ $(\forall u\in L^2(R^n))$" で良い。 (2) $B(t)$ についても "$B(t)u\in C^0([0,T],L^2(R^n))$ $(\forall u\in H^1(R^n))$" で良いし, "$t^{\sigma k}B(t)u\in C^k([0,T],L^2(R^n))$ $(\forall u\in H^1(R^n))$"

で十分である。 (3) (B-2) についても $B(t)+B(t)^*$ が $L^2(R^n)$ の有界作用素で " $(B(t)+B(t)^*)u \in C^0([0,T], L^2(R^n))$ ($\forall u \in L^2(R^n)$) " が成り立てばよい。 これらについての詳しい事は [4] を参照されたい。

次に対称化可能な系について考えよう。この場合には次の様にパラメーター α を入れて考えることにする。

$$(\tilde{S})_\alpha \quad t^\sigma \frac{du}{dt} + (\alpha + A(t))u - t^\rho B(t) u = f(t), \quad 0<t\leqq T.$$

但し σ, ρ, $A(t)$, $B(t)$ 達は定理(2-1)または注意(2-2)の(1)(2)と同じ条件を満たすものとする。(B-1)(B-2) に対応する条件として

$(\widetilde{B\text{-}1})$ α は十分大きな正数,

$(\widetilde{B\text{-}2})$ $B(t)$ は有界作用素を法として対称化可能である,

なる条件を仮定する。この時 $(\tilde{S})_\alpha$ に対して次が成り立つ。

<u>定理(2-3)</u> 次の" "を満たす正数 α_0 が存在する。"もしも $\alpha > \alpha_0$ ならば方程式 $(\tilde{S})_\alpha$ に対して定理(2-1)と同じ結果が成り立つ。"

(証明の概略) : 対称化作用素を $(\tilde{S})_\alpha$ に作用させる事によって $(\tilde{S})_\alpha$ を (S) に帰着できる。σ は定数なので α を十分大きくとっておけば (B-1) が成り立つ。また (B-2) は $(\widetilde{B\text{-}2})$ より従う。よって対称化作用素を施して得られた対称系は定理(2-1)の条件を満足するので良い。

<u>注意(2-4)</u> : $(\widetilde{B\text{-}2})$ での対称化作用素 $N(t)$ については、と

の微分の作用素ノルムは $\|N_t'(t)\| = O(1/t^\sigma)$ $(t \to +0)$ 程度の特異点はもっていても良い。実際，$N(t^\sigma \frac{\partial u}{\partial t}) = t^\sigma \frac{\partial}{\partial t}(Nu) - t^\sigma N_t' u$ に見られる様に要求されるのは $\|t^\sigma N_t'(t)\| =$ 有界 という条件のみだからである。（非特性の時は $\|N_t'(t)\| = O(1)$ $(t \to +0)$ であった事を思い出すべし。）

なお、(S)，$(\tilde{S})_\alpha$ の形の方程式について更に詳しくは [4] を参照されたい。

§3：プログラム(2)について．

上で述べた様に対称化可能な系を考える場合その対称化作用素 $N(t)$ は $\|N_t'(t)\| = O(1/t^\sigma)$ $(t \to +0)$ 程度の特異性なら持っていても良い。この事実を最もうまく反映する様な擬微分作用素のクラスを導入するというのが本節の目的である。

まず $Q(t,\xi) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t)\xi_i\xi_j$ を ξ についての２次形式で次の

(C-1) $a_{ij}(t) \in C^1([0,T])$，実数値関数 & $a_{ij}(t) = a_{ji}(t)$，

(C-2) $t > 0$ に対しては $Q(t,\xi) > 0$ $({}^\forall \xi \in R^n \setminus \{0\})$，

(C-3) $\max_{|\xi|=1} |\partial_t \log Q(t,\xi)| = O(1/t^\sigma)$ $(t \to +0)$

なる３条件を満たすものとする。この時 $Q(t,\xi)$ をクラス σ の基本２次形式であると呼ぶ。基本２次形式の主な性質は次の通りである：(1) $Q(t,\xi)$，$R(t,\xi)$ が共にクラス σ の基本２次形式

ならば $Q(t,\xi)+R(t,\xi)$ もクラスσの基本2次形式である；(2) $Q(t,\xi)$ がクラスσならば任意の $\sigma'\geqq\sigma$ に対して $Q(t,\xi)$ はクラスσ'である；(3) $a(t)\in C^1([0,T])$ が実数値関数で $a(t)>0$ $(t>0)$ かつ $|\partial_t \log a(t)|=O(1/t^\sigma)$ $(t\to+0)$ ならば $a(t)Q(t,\xi)$ もクラスσの基本2次形式である；(4) $A(\xi)$ を2次形式で $A(\xi)\geqq 0$ とすると $A(\xi)+Q(t,\xi)$ もクラスσの基本2次形式である；など。主な例を幾つか掲げておく。$Q(t,\xi)=\xi_1^2+t\xi_2^2+\cdots+t^{n-1}\xi_n^2$ はクラス1の基本2次形式、$Q(t,\xi)=e^{-1/t}\xi_1^2+e^{-2/t}\xi_2^2+\cdots+e^{-n/t}\xi_n^2$ はクラス2の基本2次形式，$Q(t,\xi)=e^{-1/t}(\sin(\frac{1}{t})+2)\xi^2$ はクラス2の基本2次形式，などなど。

次に上の $Q(t,\xi)$ を尺度関数として我々の擬微分作用素のシンボルクラス $S^m_Q([0,T])$ を次の様に定義しよう。つまり，関数 $p(t,x,\xi)$ がクラス $S^m_Q([0,T])$ に属するとは次の条件：

(D-1) $p(t,x,\xi)$ は (x,ξ) については C^∞ クラス，

(D-2) 任意の α,β に対して $\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta p(t,x,\xi)\in C^0([0,T]\times R^n\times R^n)$,

(D-3) 任意の α,β に対して次の評価をもつ

$$|\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta p(t,x,\xi)|\leqq C_{\alpha\beta}(1+Q(t,\xi))^{(m-|\beta|)/2},$$

なる条件を満たす事で決める。シンボルクラス $S^m_Q([0,T])$ についての主な性質は次の通りである：(1) $Q_1(t,\xi)\leqq A\,Q_2(t,\xi)$ (A は定数) が成り立つならば $m\geqq0$ に対して $S^m_{Q_2}([0,T])\subset S^m_{Q_1}([0,T])$, (2) $a(t)\in C^1([0,T])$ で実数値関数 & $a(t)>0$ $(t>0)$，$|\partial_t\log a(t)|=O(1/t^\sigma)$

$(t\to +0)$ とする。この時 $p(t,x,\xi)\in S^m_Q([0,T])$ に対し $p(t,x,a(t)\xi)\in S^m_R([0,T])$ 但し $R(t,\xi)=Q(t,a(t)\xi)$; (3) $\rho\geqq 0$, $m\geqq 0$ の時 $p(t,x,\xi)\in S^m_Q([0,T])$ に対し $t^{\rho m}p(t,x,\xi)\in S^m_R([0,T])$ 但し $R(t,\xi)=Q(t,t^{\rho}\xi)$; (4) $Q(t,\xi)$ 及び $t^{\sigma}\partial_t Q(t,\xi)\in S^2_Q([0,T])$; (5) $\lambda_Q(t,\xi)=\sqrt{1+Q(t,\xi)}$ とおくと $\lambda_Q(t,\xi)$ 及び $t^{\sigma}\partial_t\lambda_Q(t,\xi)\in S^1_Q([0,T])$; (6) その他 $\{Q(t,\xi)\leqq 1\}$ の部分を cut-off したりする操作について安定である；などなど。

関数 $p(t,x,\xi)\in S^m_Q([0,T])$ に対応する擬微分作用素 $P(t)=P(t,x,D)$ は次で定義される： $u(t,x)\in C^0([0,T],\mathcal{S}(R^n))$ に対し

$$P(t)u=P(t,x,D)u(t,x)=\int_{R^n}e^{i\langle x,\xi\rangle}p(t,x,\xi)\hat{u}(t,\xi)\,d\xi。$$

かかる擬微分作用素の全体を $\mathcal{S}^m_Q([0,T])$ と書く。$p(t,x,\xi)$ を擬微分作用素 $P(t)$ のシンボルといい $\sigma(P(t))$ と書く。$\mathcal{S}^m_Q([0,T])$ の主な性質は次の通りである：(1)（積について）$P_1(t)\in\mathcal{S}^{m_1}_Q([0,T])$, $P_2(t)\in\mathcal{S}^{m_2}_Q([0,T])$ ならば積 $P(t)=P_1(t)P_2(t)\in\mathcal{S}^{m_1+m_2}_Q([0,T])$ となりシンボルについては $\sigma(P(t))-\sigma(P_1(t))\sigma(P_2(t))\in S^{m_1+m_2-1}_Q([0,T])$, (2)（形式共役について）$P(t)\in\mathcal{S}^m_Q([0,T])$ に対して $P(t)^*$ を $(P(t)u,v)=(u,P(t)^*v)$ $(u,v\in\mathcal{S}(R^n))$ で定義する時 $P(t)^*\in\mathcal{S}^m_Q([0,T])$ であって $\sigma(P(t)^*)-{}^t\overline{\sigma(P(t))}\in S^{m-1}_Q([0,T])$; (3)（L^2 有界性について）$P(t)\in\mathcal{S}^0_Q([0,T])$ ならば $\|P(t)u\|\leqq C\|u\|$ $(u\in L^2(R^n))$, (4)（t に関する連続性）$P(t)\in\mathcal{S}^0_Q([0,T])$ ならば $P(t)$ は $C^0([0,T],L^2(R^n))$ から $C^0([0,T],L^2(R^n))$ への連続写像となる；(5) t に関す

る微分可能性） $p(t,x,\xi)\in C^1([0,T]\times R^n\times R^n)$ で $p(t,x,\xi)$, $p'_t(t,x,\xi)$ $\in S^0_Q([0,T])$ とする。対応する擬微分作用素を $P(t), P'_t(t)$ とおくと任意の $u\in L^2(R^n)$ に対して $P(t)u\in C^1([0,T],L^2(R^n))$ であって $C^1([0,T],L^2(R^n))$ での微分 $\frac{d}{dt}(P(t)u)$ は $P'_t(t)u$ に一致する；(6)（Λ との交換子）Λ を $(1+|\xi|^2)^{1/2}$ をシンボルにもつ擬微分作用素とする。$P(t)\in S^0_Q([0,T])$ に対して $[P(t),\Lambda]=P(t)\Lambda-\Lambda P(t)$ が定義できて再び $S^0_Q([0,T])$ に属す；などなど。

以上で必要な道具は大体出揃った。$\|N_t(t)\|=O(1/t^\sigma)$ $(t\to+0)$ を反映する対称化可能性とは次の如きである。$H(t,x,\xi)$ を $C^1([0,T]\times R^n\times R^n)$ の関数を成分にもつ $m\times m$ 行列であって

(E-1) $H(t,x,\xi)$ の各成分は実数値関数，

(E-2) $H(t,x,\xi)$ 及び $t^\sigma\partial_t H(t,x,\xi)$ の各成分 $\in S^0_Q([0,T])$,

(E-3) $H(t,x,\xi)$ の固有値を $\lambda_i(t,x,\xi)$ $(1\leqq i\leqq m)$ とおく時，
$\lambda_i(t,x,\xi)$ $(1\leqq i\leqq m)$ は実数値関数，

(E-4) $\{Q(t,\xi)\geqq 1\}$ の上では $|\lambda_i(t,x,\xi)-\lambda_j(t,x,\xi)|\geqq {}^\exists c>0$

なる4条件を満たすものとする。この時次を得る。

命題(3-1)：上の (E-1)～(E-4) を満たす $H(t,x,\xi)$ に対して次の条件を満たす様な $m\times m$ 行列 $N(t,x,\xi)$, $M(t,x,\xi)$, $D(t,x,\xi)$ が存在する： (1) $N(t,x,\xi)$, $M(t,x,\xi)$, $D(t,x,\xi)$ の各成分 $\in C^1([0,T]\times R^n\times R^n)$， (2) $N(t,x,\xi)$, $M(t,x,\xi)$, $D(t,x,\xi)$, $t^\sigma\partial_t N(t,x,\xi)$, $t^\sigma\partial_t M(t,x,\xi)$, $t^\sigma\partial_t D(t,x,\xi)$ の各成分 $\in S^0_Q([0,T])$， (3) ${}^t\overline{D(t,x,\xi)}=D(t,x,\xi)$， ④ $N(t,x,\xi)H(t,x,\xi)=D(t,x,\xi)N(t,x,\xi)$, ⑤ $N(t,x,\xi)M(t,x,\xi)=M(t,x,\xi)N(t,x,\xi)=\rho(t,\xi)$ 但し $\rho(t,\xi)$ は $S_Q^0[0,T]$ に属していてしかも $\{Q(t,\xi)\geq 2\}$ では $\rho(t,\xi)\equiv 1$, $\{Q(t,\xi)\leq 1\}$ では $\rho(t,\xi)\equiv 0$ なるものとする。

(証明の方針) $Q(t,\xi)=|\xi|^2$ ならば既に良く知られた結果である。つまり適当に $\{|\xi|\leq 1\}$ の部分を cut-off しておいて根が分離している $\{|\xi|\geq 1\}$ の部分のみで対称化作用素を構成するという方法である。このアナロジーをやるとすると、やはり $\{Q(t,\xi)\leq 1\}$ の部分を cut-off しておいて根の分離している $\{Q(t,\xi)\geq 1\}$ の部分のみで対称化作用素を構成すればよいことになる。実際 $\{|\xi|\geq 1\}$ と $\{Q(t,\xi)\geq 1\}$ とは位相的に同じホモトピー構造をもっているので同様の議論が成り立つ。他の部分も良い。逆にいえば、このアナロジーが実行できる様な枠組として擬微分作用素のクラス $S_Q^0[0,T]$ を導入したのである。

注意(3-2) §1 の例: $P_1=\partial_t^2-t^{2k}\partial_x^2+$(低階)を振り返る。特性根は $\lambda_\pm=\pm t^{k}|\xi|$ であるから普通の意味では $t=0$ で2重特性的となる。しかし尺度を $Q(t,\xi)=t^{2k}\xi^2$ とおくと $|\lambda_+-\lambda_-|\geq 2\sqrt{Q(t,\xi)}$ となって根は $S_Q^1[0,T]$ の中で分離してしまい命題(3-1)のレールに乗る。同様に $P_2=\partial_t^2-e^{-2/t}\partial_x^2+$(低階)についても特性根は $\lambda_\pm=\pm e^{-1/t}|\xi|$ より $t=0$ で普通の意味では2重特性的となる。しかし尺度を $Q(t,\xi)=e^{-2/t}\xi^2$ ととると P_1 の場

合と同様に $|\lambda_+ - \lambda_-| \geq 2\sqrt{a(t,\xi)}$ となって根は $S^1_a([0,T])$ の中で分離してしまい命題(3-1)のレールに乗ってしまう。この様に命題(3-1)の対称化可能性は $a(t,\xi)$ を適当に変化させる事によって多くの弱双曲型作用素を吸収する。その御利益については[2]で詳述したので参照されたい。

なお、本節の擬微分作用素についての更に詳しい事については[5]を参照されたい。

§4：プログラム(3)について．

さて、ここで初めに述べた"FUCHS双曲型方程式"の話にもどることにする。扱かう作用素のクラスを設定しておく。
$m \in \mathbb{N}$，$(t,x)=(t,x_1,\cdots,x_n) \in \Omega = [0,T] \times \mathbb{R}^n$，$P(t,x,\partial_t,\partial_x)$ を

$$P(t,x,\partial_t,\partial_x) = t^k \partial_t^m + P_1(t,x,\partial_x)\, t^{k-1}\partial_t^{m-1} + \cdots$$
$$+ P_k(t,x,\partial_x)\partial_t^{m-k} + \cdots + P_m(t,x,\partial_x)),$$
$$P_j(t,x,\partial_x) = \sum_{|\alpha| \leq j} a_{j\alpha}(t,x), \quad a_{j\alpha}(t,x) \in \mathcal{B}^\infty(\Omega)$$

なる"t に関しFUCHS型なる作用素"とする。P が更に次の(F-1)～(F-5)の条件を満たす時 P を"クラス (σ,μ) $(\sigma \geq 1, \mu > 0)$ のFUCHS双曲型作用素"であると呼ぶことにする。

(F-1) 正数 $\mu > 0$ が存在して $|\alpha| = j$ の時 $a_{j\alpha}(t,x)$ は $a_{j\alpha}(t,x) = t^{\mu j - j + \min(j,k)} b_{j\alpha}(t,x)$ $(\exists b_{j\alpha}(t,x) \in \mathcal{B}^\infty(\Omega))$ と分解できる。

(例えば "$k=0$ で非特性" の場合には $\mu=1$, "$P=t(\partial_t^2-\partial_x^2)$ +低階" の場合も $\mu=1$, "$P=t\partial_t^2-\partial_x^2$ +低階" の場合には $\mu=1/2$, とおくと (F-1) は満たされる, などなど。)

(F-2) $\lambda_i(t,x,\xi)$ $(1\leqq i\leqq m)$ を $\lambda^m+\sum_{j=1}^m\sum_{|\alpha|=j}b_{j\alpha}(t,x)\xi^\alpha\lambda^{m-j}=0$ の根とする時それらは実数値関数である,

(F-3) 或るクラス σ の基本2次形式 $Q(t,\xi)$ が存在して
$|\lambda_i(t,x,\xi)-\lambda_j(t,x,\xi)|\geqq c\sqrt{Q(t,\xi)}$ $(c>0,\ i\neq j)$,

(F-4) 主部は次のクラスに属する: $1\leqq j\leqq m$ に対して
$(\sum_{|\alpha|=j}b_{j\alpha}\xi^\alpha)$, $t^\sigma\partial_t(\sum_{|\alpha|=j}b_{j\alpha}(t,x)\xi^\alpha)\in S_Q^j([0,T])$,

(F-5) 低階は次のクラスに属する: $1\leqq j\leqq m$ に対して
$t^{\sigma j-\min(j,k)}(\sum_{|\alpha|<j}a_{j\alpha}(t,x)(\sqrt{-1}\xi)^\alpha)\in S_R^{j-1}([0,T])$,
但し $R(t,\xi)=Q(t,t^{\sigma+\mu-1}\xi)$。

上の (F-1)〜(F-5) の条件から次の事が分かる。つまり, P をクラス (σ,μ) とすると P に $t^{\sigma m-k}$ を掛けて $t^{\sigma m-k}P$ を整理すると

$$t^{\sigma m-k}P=(t^\sigma\partial_t)^m+\sum_{j=1}^m\sum_{|\alpha|=j}b_{j\alpha}(t,x)(t^\rho\partial_x)^\alpha(t^\sigma\partial_t)^{m-j}\cdots(主部)$$
$$+\sum_{j=1}^m Q_{j-1}(t,x,\partial_x)(t^\sigma\partial_t)^{m-j}\ \cdots\ (低階)$$

を得る。但し $\rho=\sigma+\mu-1$, $Q_{j-1}(t,x,\partial_x)$ は $(j-1)$ 階の微分作用素である。主部が上の様にうまく揃って整理されるというのが (F-1) の条件であり低階について $Q_{j-1}(t,x,\xi)\in S_R^{j-1}([0,T])$ となるというのが (F-5) の条件である。(F-2)〜(F-4) については §3 の (E-1)〜(E-4) と比較してみれば容易にその意味する

所は理解されよう。従って例えば§1の $P_1=\partial_t^2-t^{2\ell}\partial_x^2+t^{\ell-1}a\partial_x+a\partial_t+c$ はクラス(1,1)と見做せるし，$P_2=\partial_t^2-e^{-2/t}\partial_x^2+\frac{1}{t^2}e^{-1/t}\times a\partial_x+a\partial_t+c$ はクラス(2,1)と見做せる。[2]で述べた"クラスσの作用素"はここでは"クラス$(\sigma,1)$の作用素"のこととなる。

我々の目的はかかるFuchs双曲型方程式に対してC^∞初期値問題を解くことにあり，その方針は§1で説明しておいた。§1の推論をもう一度復習してみると，それは，①P_1, P_2に対する初期値問題を"(*) $P_1(t^s u_s)=t^{s-1}\times$(既知関数)"或いは"(**) $P_2(e^{-s/2t}u)=e^{-s/2t}\times$(既知関数)"という方程式に帰着するプロセス，と② 方程式(*), (**)を解くというプロセス，の2つの部分から成り立っていた。§2, §3で述べたのはこの②の部分に相当する。今の場合に②の部分を述べておくと次の様になる。

$P(t,x,\partial_t,\partial_x)$をクラス$(\sigma,\mu)$のFuchs双曲型作用素とする。②の(*)または(**)に対応する方程式は今の場合次の如し：

$$(G)_s:\ P(t,x,\partial_t,\partial_x)(\Delta_\sigma(t,s)\,u)=(\Delta_\sigma(t,s)\,f(t,x))\ .$$

但し$\Delta_\sigma(t,s)$は$\sigma=1$の時$\Delta_\sigma=t^s$，$\sigma>1$の時は$\Delta_\sigma=e^{-s/(\sigma-1)t^{\sigma-1}}$で定義される関数とする。定理(2-3)を翻訳すると次を得る。

<u>定理(4-1)</u>：次の"…"を満たす正数s_0が存在する："もしも$s>s_0$ならば，$f(t,x)\in C^0([0,T],H^\infty(R^n))$で$t^{\sigma\ell}f(t,x)\in C^\ell([0,T],$

$H^\infty(R^n))$ $(\ell=1,2,\cdots)$ を満たす任意の $f(t,x)$ に対し、方程式 $(G)_s$ の解 $u(t,x)\in C^0([0,T],H^\infty(R^n))$ で $t^{\sigma\ell}u(t,x)\in C^\ell([0,T],H^\infty(R^n))$ $(\ell=1,2,\cdots)$ を満たすものが唯一つ存在する。更にもしも $Supp(f)\subset C_\mu(K)$ (但し K は R^n のコンパクト集合, $C_\mu(K)=\{(t,x);\ \min_{y\in K}|x-y|\leq \lambda_{max}|t|^\mu/\mu\}$, $\lambda_{max}=\max\{|\lambda_i(t,x,\xi)|;\ 1\leq i\leq m,\ (t,x),\ |\xi|=1\}$ とする) ならば解 $u(t,x)$ も $Supp(u)\subset C_\mu(K)$ を満たす。"

(証明の概略). 方程式 $(G)_s$ の両辺に $t^{\sigma m-k}$ を掛け、次に関係式" $t^\sigma\partial_t(\Delta_\sigma(t,s)u)=\Delta_\sigma(t,s)((t^\sigma\partial_t+s)u)$ "を使って両辺の $\Delta_\sigma(t,s)$ を相殺すると次の形の方程式を得る。

$$(*)\quad \begin{aligned}&(t^\sigma\partial_t+s)^m u+\sum_{j=1}^m\sum_{|\alpha|=j}b_{j\alpha}(t,x)(t^\rho\partial_x)^\alpha(t^\sigma\partial_t+s)^{m-j}u\\&+\sum_{j=1}^m Q_{j-1}(t,x,\partial_x)(t^\sigma\partial_t+s)^{m-j}u=t^{\sigma m-k}f(t,x)\ .\end{aligned}$$

但し $\rho=\sigma+\mu-1$, $Q_{j-1}(t,x,\partial_x)\in S_R^{j-1}([0,T])$ $(R(t,\xi)=Q(t,t^\rho\xi))$。

これを §2 の $(S)_\alpha$ の対称化可能な系に帰着したい。次の様にする。$\rho(t)\in C^\infty(R)$ を $\rho(t)\equiv 0$ $(t\leq 1)$, $0\leq\rho(t)\leq 1$ $(1\leq t\leq 2)$, $\rho(t)\equiv 1$ $(t\geq 2)$ なる関数とし $\Theta(t,\xi)=\rho(4-\sqrt{Q(t,\xi)})+\sqrt{Q(t,\xi)}\,\rho(\sqrt{Q(t,\xi)})$ とおく。$\Theta(t)$ を $\Theta(t,\xi)$ に対応する擬微分作用素とすると $\Theta(t)$, $t^\rho\Theta_t(t)\in S_Q^1([0,T])$ である。今 $u_j(t)=(\sqrt{-1})^{m-j}(1+t^\rho\Theta(t))^{m-j}\times$ $\times(t^\sigma\partial_t+s)^{j-1}u(t)$ $(j=1,2,\cdots,m)$ とおき $\vec{u}(t)={}^t(u_1,u_2,\cdots,u_m)$, $\vec{f}(t)={}^t(0,\cdots,0,t^{\sigma m-k}f(t))$ とおく。すると $(*)$ は

$$(t^\sigma\partial_t+s)\vec{u}+A(t)\vec{u}-\sqrt{-1}\,t^\rho H(t)\Theta(t)\vec{u}=\vec{f}(t)$$

なる形の一階擬微分方程式系に書き換えることができる。

但し $A(t), H(t)$ は $m\times m$ 行列で $A(t)$ の各成分は $\mathcal{S}^0_R([0,T])$ に属し $H(t)$ の各成分は $\mathcal{S}^0_Q([0,T])$ に属す。更に具体的には $H(t)$ は

$$H(t)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & \\ -h_m(t), & -h_{m-1}(t), & \cdots, & & -h_1(t) \end{bmatrix},$$

$$\sigma(h_j(t))=\sum_{|\alpha|=j} b_{j\alpha}(t,x)\,\xi^\alpha\,Ⓗ(t,\xi)^{-j}$$

で与えられる。条件 (F-2)〜(F-4) より $H(t)$ は §3 の条件 (E-1)〜(E-4) を満足し従って対称化可能である。よって定理 (2-3) を適用して定理の前半を得る。後半は次の様にする。近似解 $\{u_n(t)\}_{n=1}^\infty$ を次の様に構成する。$c_j(x)=Q_{j-1}(0,x,0)$ とおき $U(t)$ を常微分方程式 “$(t^\sigma\partial_t+s)^m U+\sum_{j=1}^m c_j(x)(t^\sigma\partial_t+s)^{m-j}U=t^{\sigma m-k}f(t,x)$” の解とする。任意の n に対して $u_n(t)$ を $0\leq t\leq\frac{1}{n}$ では $u_n(t)=U(t)$ と定義し，$\frac{1}{n}\leq t\leq T$ では (*) の解で “$\partial_t^i u_n|_{t=1/n}=\partial_t^i U|_{t=1/n}$ $(0\leq i\leq m-1)$” なる初期データを持つものとして定義する。すると近似解 $u_n(t)$ は真の解 $u(t)$ に収束する。もしも $\mathrm{Supp}(f)\subset C_\mu(K)$ ならば近似解の構成法より $\mathrm{Supp}(u_n)\subset C_\mu(K)$，従って $\mathrm{Supp}(u)\subset C_\mu(K)$ を得ることになる。これで定理が全て示された。

以上で②のプロセスは完了した。残るは E に対する初期値問題を $(G)_s$ の形の方程式に帰着させる①のプロセスのみである。§1 で見た様にその方法は σ の値によって若干異なって来る。幾つかの場合に分けて述べてゆくことにしよう。

Case(I)：$\sigma=1$の場合； $P(t,x,\partial_t,\partial_x)$をクラス$(1,\mu)$のFuchs双曲型作用素，$C(\lambda,x)$をその決定多項式とする。この時：

<u>定理(4-2)</u>：任意の$\lambda\in\mathbb{Z}$, $\lambda\geqq m-k$に対して正数c_λが存在して$|C(\lambda,x)|\geqq c_\lambda$ $(\forall x\in\mathbb{R}^n)$が成り立つとする。この時、任意の$u_0(x),\cdots,u_{m-k-1}(x)\in H^\infty(\mathbb{R}^n)$と任意の$f(t,x)\in C^\infty([0,T],H^\infty(\mathbb{R}^n))$に対して、初期値問題“$P(t,x,\partial_t,\partial_x)u(t,x)=f(t,x)$, $\partial_t^i u(t,x)|_{t=0}=u_i(x)$ $(0\leqq i\leqq m-k-1)$”の解$u(t,x)\in C^\infty([0,T],H^\infty(\mathbb{R}^n))$が唯一つ存在する。しかも、もしも或るコンパクト集合$K\subset\mathbb{R}^n$に対して$\mathrm{Supp}(u_i)\subset K$ $(0\leqq i\leqq m-k-1)$かつ$\mathrm{Supp}(f)\subset C_\mu(K)$ならば、解$u(t,x)$についても$\mathrm{Supp}(u)\subset C_\mu(K)$が成り立つ。また、もしも$f(t,x)$が$f(t,x)=\Delta_a(t,s)\hat{f}(t,x)$（但し$a>1$, $s>0$, $\hat{f}(t,x)$は$t^{al}\hat{f}(t,x)\in C^l([0,T],H^\infty(\mathbb{R}^n))$ $(l=1,2,\cdots)$を満たす）と分解できるならば“$P(t,x,\partial_t,\partial_x)u(t,x)=f(t,x)$, $\partial_t^i u(t,x)|_{t=0}=0$ $(0\leqq i\leqq m-k-1)$”の解$u(t,x)$もまた$u(t,x)=\Delta_a(t,s)\hat{u}(t,x)$（$\hat{u}(t,x)$は$t^{al}\hat{u}(t,x)\in C^l([0,T],H^\infty(\mathbb{R}^n))$ $(l=1,2,\cdots)$を満たす）と分解できる。

<u>系(4-3)</u>：任意の$u_0(x),\cdots,u_{m-k-1}(x)\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$と任意の$f(t,x)\in C^\infty([0,T]\times\mathbb{R}^n)$に対して、初期値問題“$P(t,x,\partial_t,\partial_x)u(t,x)=f(t,x)$, $\partial_t^i u(t,x)|_{t=0}=u_i(x)$ $(0\leqq i\leqq m-k-1)$”の解$u(t,x)\in C^\infty([0,T]\times\mathbb{R}^n)$が唯一つ存在する。しかも解の依存領域は有界である。

（証明の概略）系(4-3)は定理(4-2)と“1の分解”とから容易

に得られる。従って定理の方のみ述べる。解$u(t,x)$をTaylor展開して$u(t,x)=u_0(x)+tu_1(x)+t^2u_2(x)/2!+\cdots+t^{s-1}u_{s-1}(x)/(s-1)!+t^su_s(t,x)$と表わすとTaylor係数$u_0(x),u_1(x),\cdots,u_{s-1}(x)$は一意的に決まる。結局"$t^su_s(t,x)$"を未知関数として方程式を書き直すと"$P(t^su_s)=t^{s-m+k}\times$(既知関数)"となり$(G)_s$の形の方程式を得る。定理(4-1)より解$u_s(t,x)$で$t^\ell u_s(t,x)\in C^\ell([0,T],H^\infty(R^n))$ $(\ell=1,2,\cdots)$を満たすものの存在を得る。結局、初めの初期値問題の解$u(t,x)$として$u(t,x)\in C^s([0,T],H^\infty(R^n))$なるものが得られた事になる。ここで"$s$が十分大きい時、$s$の値を変えても同じ解が出て来る"事に注意すれば結局$u(t,x)\in\bigcap_{s:\text{十分大}}C^s([0,T],H^\infty(R^n))=C^\infty([0,T],H^\infty(R^n))$となり$C^\infty([0,T],H^\infty(R^n))$の中で解が得られた事になる。これで存在が言えた。一意性の証明も上の様にTaylor展開と定理(4-1)を組み合わせれば容易。"Supp"についての条件は上の解の構成法より明らか。"分解"についての条件はPをクラス$(a,a+\mu-1)$と見做して同じ議論を適用すれば良い。これで定理が全て示された。

これが$\sigma=1$の場合である。考え方は§1のP_1で説明したものと全く同様であることを思い出すべし。例として例えば
$$P=\partial_t^2-t^{2\ell_1}\partial_{x_1}^2-t^{2\ell_2}\partial_{x_2}^2+t^{\ell_1-1}a_1(t,x)\partial_{x_1}+t^{\ell_2-1}a_2(t,x)\partial_{x_2}+b(t,x)\partial_t+c(t,x)$$
などがこの枠組内に吸収される。実際、基本2次形式として$Q(t,\xi)=t^{2\ell_1}\xi_1^2+t^{2\ell_2}\xi_2^2$をとれば良い。

Case(II): $\sigma>1$の場合; $\sigma>1$とし, $P(t,x,\partial_t,\partial_x)$をクラス$(\sigma,\mu)$のFuchs双曲型作用素とする。次の条件を仮定しよう:

(条件) $|\alpha|\neq 0$ならば$a_{j\alpha}(t,x)$は$a_{j\alpha}(t,x)=\Delta_\sigma(t,s_{j\alpha})\tilde{a}_{j\alpha}(t,x)$ ($\exists s_{j\alpha}>0$, $\exists\tilde{a}_{j\alpha}(t,x)\in\mathcal{B}^\infty(\Omega)$)と分解される。

但し$a_{j\alpha}(t,x)$は本節冒頭に述べた通りである。この時:

<u>定理(4-4)</u>: 任意の$\lambda\in\mathbb{Z}$, $\lambda\geqq m-k$に対して正数c_λが存在して$|C(\lambda,x)|\geqq c_\lambda$ ($\forall x\in\mathbb{R}^n$)が成り立つとする。この時、任意の$u_0(x),\cdots,u_{m-k-1}(x)\in H^\infty(\mathbb{R}^n)$と任意の$f(t,x)\in C^\infty([0,T],H^\infty(\mathbb{R}^n))$に対して、初期値問題"$P(t,x,\partial_t,\partial_x)u(t,x)=f(t,x)$, $\partial_t^i u(t,x)|_{t=0}=u_i(x)$ $(0\leqq i\leqq m-k-1)$"の解$u(t,x)\in C^\infty([0,T],H^\infty(\mathbb{R}^n))$が唯一つ存在する。しかも、もしも或るコンパクト集合$K\subset\mathbb{R}^n$に対して、$\mathrm{Supp}(u_i)\subset K$ $(0\leqq i\leqq m-k-1)$かつ$\mathrm{Supp}(f)\subset C_\mu(K)$ならば解$u(t,x)$についても$\mathrm{Supp}(u)\subset C_\mu(K)$が成り立つ。また、もしも$f(t,x)$が$f(t,x)=\Delta_a(t,s)\hat{f}(t,x)$ (但し$a>\sigma$, $s>0$, $\hat{f}(t,x)$は$t^{al}\hat{f}(t,x)\in C^l([0,T],H^\infty(\mathbb{R}^n))$ $(l=1,2,\cdots)$を満たす)と分解できるならば"$P(t,x,\partial_t,\partial_x)u(t,x)=f(t,x)$, $\partial_t^i u(t,x)|_{t=0}=0$ $(0\leqq i\leqq m-k-1)$"の解$u(t,x)$もまた$u(t,x)=\Delta_a(t,s)\hat{u}(t,x)$ ($\hat{u}(t,x)$は$t^{al}\hat{u}(t,x)\in C^l([0,T],H^\infty(\mathbb{R}^n))$ $(l=1,2,\cdots)$を満たす)と分解できる。

<u>系(4-5)</u> 任意の$u_0(x),\cdots,u_{m-k-1}(x)\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$と任意の$f(t,x)\in C^\infty([0,T]\times\mathbb{R}^n)$に対して、初期値問題"$P(t,x,\partial_t,\partial_x)u(t,x)=f(t,x)$, $\partial_t^i u(t,x)|_{t=0}=u_i(x)$ $(0\leqq i\leqq m-k-1)$"の解$u(t,x)\in C^\infty([0,T]\times\mathbb{R}^n)$がい

唯一つ存在する。しかも解の伝播速度は有限である。

(証明の概略) 系(4-5)は定理(4-4)と"1の分解"から容易に得られる。定理の証明は次の通り。$P(t,x,\partial_t,\partial_x)$ を $P(t,x,\partial_t,\partial_x)=P^{(1)}(t,x,\partial_t)+P^{(2)}(t,x,\partial_t,\partial_x)$, $P^{(1)}(t,x,\partial_t)\equiv P(t,x,\partial_t,0)$, $P^{(2)}(t,x,\partial_t,\partial_x)\equiv P(t,x,\partial_t,\partial_x)-P^{(1)}(t,x,\partial_t)$ と分解する。すると $P^{(1)}$ は常微分作用素なので定理(4-2)と同じ結果が成り立つ。ここで解 $u(t,x)$ を $u(t,x)=u_{(0)}(t,x)+u_{(1)}(t,x)+\cdots+u_{(s-1)}(t,x)+u_{(s)}(t,x)$ とおいて§1と同様の分割をやる。つまり，初期値問題は "$(*)_0$ $P^{(1)}u_{(0)}=f$, $\partial_t^i u_{(0)}|_{t=0}=u_i$ $(0\leq i\leq m-k-1)$", "$(*)_1$ $P^{(1)}u_{(1)}=-P^{(2)}u_{(0)}$, データ$\equiv 0$" "$(*)_2$ $P^{(1)}u_{(2)}=-P^{(2)}u_{(1)}$, データ$\equiv 0$", ・・・, "$(*)_{s-1}$ $P^{(1)}u_{(s-1)}=-P^{(2)}u_{(s-2)}$, データ$\equiv 0$" 及び "$(*)_s$ $Pu_{(s)}=-P^{(2)}u_{(s-1)}$, データ$\equiv 0$" なる $(s+1)$ 個の方程式に分割される。$P^{(1)}$ については定理(4-2)と同じ結果が成り立つので $(*)_0,(*)_1,\cdots,(*)_{s-1}$ 迄は一意的に解け、しかも解の"分解"の条件より $s_0=\min\{s/\alpha\}(>0)$ とおくと $u_{(1)}(t,x)=\Delta_\sigma(t,s_0)\tilde{u}_1(t,x)$, $u_{(2)}(t,x)=\Delta_\sigma(t,2s_0)\tilde{u}_2(t,x)$, ・・・, $u_{(s-1)}(t,x)=\Delta_\sigma(t,(s-1)s_0)\tilde{u}_{s-1}(t,x)$ と分解される。結局，$(*)_s$ の右辺 $=\Delta_\sigma(t,ss_0)\hat{f}(t,x)$ ($\hat{f}$ は既知関数) となる。ここで $u_{(s)}(t,x)=\Delta_\sigma(t,ss_0)\hat{u}_s(t,x)$ とおいて $\hat{u}_s(t,x)$ の方程式と見做すと $(*)_s$ は $(G)_s$ の形の方程式となり、$\hat{u}_s(t,x)\in C^0([0,T],H^\infty(R^n))$ であって、$t^{\sigma\ell}\hat{u}_s(t,x)\in C^\ell([0,T],H^\infty(R^n))$ $(\ell=1,2,\cdots)$ なる解を得る。以上を合わせると $C^\infty([0,T],H^\infty(R^n))$ の中で初期値問題の解が求められた

ことになる。一意性の証明も解の"分解"についての条件と定理(4-1)とを組み合わせれば容易。"Supp" についての条件は上の解の構成法より明らか。"分解"についての条件は P をクラス $(a, a+\mu-1)$ と見做して同じ議論を適用すればよい。

これで $\sigma>1$ の場合が示された。考え方は§1の P_2 で説明したものと全く同様であることを思い出すべし。例として例えば $P=\partial_t^2-e^{-2/t}\partial_{x_1}^2-e^{-4/t}\partial_{x_2}^2+\frac{1}{t^2}e^{-1/t}a_1(t,x)\partial_{x_1}+\frac{1}{t^2}e^{-2/t}a_2(t,x)\partial_{x_2}+b(t,x)\partial_t+c(t,x)$ などは上の枠内に吸収される。

ここで以後の記述を簡単にする為に少し名前をつけておこう。つまり、定理(4-2)の内容が成り立つ時"P に対する初期値問題は 1-effectively に $C^\infty([0,T], H^\infty(R^n))$-適切である"と呼び定理(4-4)の内容が成り立つ時"P に対する初期値問題は σ-effectively に $C^\infty([0,T], H^\infty(R^n))$-適切である"と呼ぶことにする。すると次の基本補題を得る。

<u>補題(4-6)</u>：P を $P(t,x,\partial_t,\partial_x)=P^{(1)}(t,x,\partial_t,\partial_x)+P^{(2)}(t,x,\partial_t,\partial_x)$ なる微分作用素であって ① P はクラス (σ,μ) $(\sigma>1)$ の Fuchs 双曲型である，② $P^{(1)}$ に対する初期値問題は或る $\sigma'<\sigma$ なる σ' に対して σ'-effectively $C^\infty([0,T], H^\infty(R^n))$ 適切である，③ $P^{(2)}$ は $P^{(2)}(t,x,\partial_t,\partial_x)=\Delta_\sigma(t,s)\tilde{P}^{(2)}(t,x,\partial_t,\partial_x)$（但し $s>0$, $\tilde{P}^{(2)}$ の係数は の$\mathcal{B}^\infty(\Omega)$ に属する）と分解できる，なる3条件を満たすものとする。この時、P に対する初期値問題は σ-effectively に $C^\infty([0,T],$

$H^\infty(\mathbb{R}^n)$－適切となる。

（証明の方針） 定理(4-4)の証明中の $P^{(1)}, P^{(2)}$ の役割を上の $P^{(1)}$, $P^{(2)}$ に演じさせれば同じ議論が適用できる。

この基本補題を使えば次の Case III が証明できる。

Case(III)：$\sigma=1$ と $\sigma>1$ の混合した場合； この場合の意味については[2]の Case(III)で述べておいた。要するに，$P=\partial_t^2 - t^{2\ell}\partial_{x_1}^2 - e^{-2/t}\partial_{x_2}^2 + t^{\ell-1}a_1(t,x)\partial_{x_1} + \frac{1}{t^2}e^{-1/t}a_2(t,x)\partial_{x_2} + a(t,x)\partial_t + c(t,x)$ の様な作用素を吸収しようとするものである。次の様に定式化する。$n_i\ (1\leqq i\leqq \ell)$ を $1\leqq n_1<n_2<\cdots<n_\ell=n$ なる整数とし、x を $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(x^{(1)},x^{(2)},\cdots,x^{(\ell)})$, $x^{(1)}\equiv(x_1,x_2,\cdots,x_{n_1})$, $x^{(2)}\equiv(x_{n_1+1},\cdots,x_{n_2})$, $\cdots$, $x^{(\ell)}\equiv(x_{n_{\ell-1}+1},\cdots,x_{n_\ell})$ と分割する。α についても同様に $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\alpha^{(1)},\alpha^{(2)},\cdots,\alpha^{(\ell)})$ と分ける。対応して $P(t,x,\partial_t,\partial_x)$ を $P^{(1)}(t,x,\partial_t,\partial_{x^{(1)}})\equiv P(t,x,\partial_t,\partial_{x_1},\cdots,\partial_{x_{n_1}},0,\cdots,0)$, $P^{(2)}(t,x,\partial_t,\partial_{x^{(1)}},\partial_{x^{(2)}})\equiv P(t,x,\partial_t,\partial_{x_1},\cdots,\partial_{x_{n_2}},0,\cdots,0)$, $\cdots$, $P^{(\ell)}(t,x,\partial_t,\partial_{x^{(1)}},\partial_{x^{(2)}},\cdots,\partial_{x^{(\ell)}})\equiv P(t,x,\partial_t,\partial_{x_1},\cdots,\partial_{x_{n_\ell}})$ と分割する。今、$1\leqq\sigma_1<\sigma_2<\cdots<\sigma_\ell=\sigma$ なる実数 $\sigma_i\ (1\leqq i\leqq \ell)$ と正数 μ とが存在して次が成り立つと仮定する。

（条件1） $1\leqq i\leqq \ell$ に対して、$P^{(i)}(t,x,\partial_t,\partial_{x^{(1)}},\cdots,\partial_{x^{(i)}})$ は $(t,x^{(1)},\cdots,x^{(i)})$ 変数の作用素としてクラス (σ_i,μ) である，

（条件2） $a_{j,\alpha}(t,x)$ が次を満たす：“ $|\alpha|\neq 0$ なら $\alpha=(\alpha^{(1)},\cdots,\alpha^{(k)},0,\cdots,0)$, $|\alpha^{(k)}|\neq 0$ なる k がある。この k について

もしも $\sigma_k>1$ ならば $a_{j\alpha}(t,x)$ は $a_{j\alpha}(t,x)=\Delta_{\sigma_k}(t,s_{j\alpha})\tilde{a}_{j\alpha}(t,x)$ $({}^{\exists}s_{j\alpha}>0,\ {}^{\exists}\tilde{a}_{j\alpha}(t,x)\in\mathcal{B}^\infty(\Omega))$ と分解できる。

[3]の Case (III) を参照すべし。この時次が成り立つ。

<u>定理(4-7)</u>：任意の $\lambda\in\mathbb{Z}$, $\lambda\geq m-k$ に対して正数 c_λ が存在して $|C(\lambda,x)|\geq c_\lambda$ $({}^{\forall}x\in\mathbb{R}^n)$ が成り立つとする。この時、上の P に対する初期値問題 "$P(t,x,\partial_t,\partial_x)u(t,x)=f(t,x)$, $\partial_t^i u(t,x)|_{t=0}=u_i(x)$ $(0\leq i\leq m-k-1)$" は $\sigma(=\sigma_\ell)$-effectively に $C^\infty([0,T],H^\infty(\mathbb{R}^n))$-適切である。

<u>系(4-8)</u>：任意の $u_0(x),\cdots,u_{m-k-1}(x)\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ と任意の $f(t,x)\in C^\infty([0,T]\times\mathbb{R}^n)$ に対して、初期値問題 "$P(t,x,\partial_t,\partial_x)u(t,x)=f(t,x)$, $\partial_t^i u(t,x)|_{t=0}=u_i(x)$ $(0\leq i\leq m-k-1)$" の解 $u(t,x)\in C^\infty([0,T]\times\mathbb{R}^n)$ が唯一つ存在する。しかも解の依存領域は有限である。

(証明の概略) 定理の方のみ述べる。定理(4-2), (4-4) より、$\sigma_1=1$, $\sigma_1>1$ の如何にかかわらず、$P^{(1)}$ に対する初期値問題は σ_1-effectively に $C^\infty([0,T],H^\infty(\mathbb{R}^n))$-適切である。今 $P^{(2)}$ に注目すると $P^{(2)}$ は補題(4-6)の条件を満足する。よって補題(4-6)により，$P^{(2)}$ に対する初期値問題も σ_2-effectively に $C^\infty([0,T],H^\infty(\mathbb{R}^n))$-適切となる。以下次々と補題(4-6)を適用してゆけば、結局 "$P^{(\ell)}$ に対する初期値問題は σ_ℓ-effectively に $C^\infty([0,T],H^\infty(\mathbb{R}^n))$-適切" となる。$P^{(\ell)}=P$，$\sigma_\ell=\sigma$ より上を得るというわけである。

[2]のCase(IV)で述べた様に"クラス(σ,μ)"を"クラス$(\sigma(t),\mu)$"とσを関数$\sigma(t)$に変えて条件付けてゆけばもっと広範囲の方程式を吸収できる。しかし議論の筋道は上と同様であるからもはや多言を要しまい。

なお、FUCHS双曲型方程式の初期値問題について、更に詳しくは[3][6]を参照されたい。

本稿で引用した文献は次の通りである。[1] FUCHS双曲型方程式の初期値問題について(数理解析研究所講究録 No.341, "超函数と線型微分方程式VI" pp. 164−172 (1978)),
[2] FUCHS双曲型方程式とその周辺(数理解析研究所講究録、No.376 "偏微分方程式の解の構造の研究" pp39−59 (1980)),
[3] Cauchy problems for Fuchsian hyperbolic partial differential equations (Proc. Japan Acad., 54, 92−96 (1978)), [4] Singular hyperbolic systems, I. Existence, uniqueness and differentiability (J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. IA. 26-2, 213−238 (1979)), [5] Singular hyperbolic systems, II. Pseudo-differential operators with a parameter and their applications to singular hyperbolic systems, (J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. IA. 26-3, 391−412 (1979)), [6] Singular hyperbolic systems, III. On the Cauchy problem for Fuchsian hyperbolic partial differential equations (to appear).